(Folgerung: Konvergente Folgen sind beschränkt!)

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und o.E. $|b| > 0$.

Dann gibt es $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq N_2 : |a_n - a| < \frac{1}{2} \varepsilon \frac{1}{|b|} \qquad (2)$$

und $N_3 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq N_3 : |b_n - b| < \frac{1}{2} \varepsilon \frac{1}{1+|a|} \qquad (3)$$

Wähle $N := \max\{N_1, N_2, N_3\} \xRightarrow{(1)-(3)}$

$$\forall n \geq N: |a_n b_n - ab| < \varepsilon.$$

ad iii) Sei also $|b| > 0 \Longrightarrow$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ mit } |b_n - b| < \frac{1}{2}|b|$$
$$\forall n \geq N_1$$

<u>umgekehrte</u> Δ-Ungl. $\Longrightarrow$

$$|b_n| = |b-(b-b_n)| \geq |b| - |b_n - b|$$

$$> |b| - \tfrac{1}{2}|b| \quad \forall\, n \geq N_1$$

$$\Longrightarrow: \quad |b_n| \geq \frac{|b|}{2} \quad \forall\, n \geq N_1$$

$$\Longrightarrow \quad \{1/b_n\}_{n \geq N_1} \quad \underline{\text{bildbar}}$$

<u>Zeige</u>: $\boxed{\dfrac{1}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{b}}$ ⊛

(daraus folgt $a_n/b_n \longrightarrow a/b$ mit ii))

ad ⊛: für $n \geq N_1$ ist

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n|\,|b|} \leq$$

$$\frac{2}{|b|^2} |b_n - b| .$$

Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so wähle $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|b_n - b| < \varepsilon \frac{1}{2} |b|^2 \quad \forall n \geq N_2$$

$$\Longrightarrow \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq \max\{N_1, N_2\}.$$

$\square$

Als einfache Folgerung aus Satz 6.1 v) ergibt sich

Satz 6.2 (Einschließungssatz)

Seien (A_n), (B_n), (a_n) reelle Folgen mit

$$A_n \leq a_n \leq B_n$$

für fast alle n. Sind (A_n), (B_n) konvergent mit

$$\alpha := \lim_{n \to \infty} A_n = \lim_{n \to \infty} B_n ,$$

so ist auch (a_n) konvergent gegen α.

Beispiel:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 8^n} = ?}$$

$$a_n := \sqrt[n]{3^n + 8^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

- $a_n \geq \sqrt[n]{8^n} = 8 =: A_n$ (Konstante Folge)
- $a_n \leq \sqrt[n]{8^n + 8^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 8^n} = \sqrt[n]{2} \cdot 8 =: B_n \longrightarrow 8$ (nach v) von Satz 6.1)

also: $\underset{\substack{\downarrow \\ 8}}{A_n} \leq a_n \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 8}}{B_n}$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 8^n} = 8$$

Damit ist "gezeigt": $\lim_{n\to\infty} a_n = 8$

<u>Anwendung</u>: Seien $k \in \mathbb{N}$ und

$$a_1, \dots, a_k \geq 0$$

gegebene reelle Zahlen. Man bildet die Folge

$$x_n := \sqrt[n]{\sum_{j=1}^{k} (a_j)^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

<u>Beh</u>: $\boxed{\lim_{n \to \infty} x_n = \max\{a_1, \dots, a_k\}}$

<u>Beweis</u>: Sei $\alpha := \max\{a_1, \dots, a_k\}$

$$\Longrightarrow \alpha^n \leq \sum_{j=1}^{k} (a_j)^n \leq k \cdot \alpha^n$$

$$\Longrightarrow \boxed{\alpha \leq x_n \leq \alpha \sqrt[n]{k}}$$

und $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{k} = 1$.

$\square$

Vergleich von Folgen

Def. 6.3: Zwei (nicht notwendig konvergente) Folgen (a_n), (b_n) heißen asymptotisch gleich $:\Longleftrightarrow$

$b_n \neq 0$ für fast alle n und

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1}$$

Schreibweise: $a_n \cong b_n$ bei $n \to \infty$

Bsple: 1) $\boxed{1+2+\ldots+n \cong \frac{1}{2} n^2}$ bei $n\to\infty$

(denn l.S. $= \frac{1}{2} n(n+1)$)

2) $\boxed{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \cong \frac{1}{2\sqrt{n}}}$ bei $n \to \infty$

Beweis von 2): $\dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} =$

$$2\sqrt{n^2+n} - 2n =$$

$$2n\left[\sqrt{1+1/n} - 1\right] \overset{\uparrow}{=} \left(x-y = \frac{x^2-y^2}{x+y}\right)$$

$$2n \frac{1+1/n - 1}{\sqrt{1+1/n}+1} = 2\frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1} \; * ;$$

nun benutze $\quad 1 \leq \sqrt{1+1/n} \leq 1+\frac{1}{n}$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+1/n} = 1$$

Setze dies in $*$ ein $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} * = 1.$ $\square$

Welche Kriterien gibt es, um auf Konvergenz zu schließen, ohne den Grenzwert vorher zu kennen? (s. Satz 6.3)

Def 6.4:

a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\boxed{\text{beschränkte}}$ Folge $:\Longleftrightarrow$

$$\exists M \geq 0 : \quad |x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Bem:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergent} \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ beschränkt}$$

$$\Updownarrow$$

$$\{x_n : n\in\mathbb{N}\} \text{ beschränkt in } \mathbb{C}$$

---

b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folge.

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ monoton } \begin{cases} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{cases} :\Longleftrightarrow \begin{cases} x_n \leq x_{n+1} \\ x_n \geq x_{n+1} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(war schon in §5!)

$$(x_n) \text{ streng } \ldots\ldots :\Longleftrightarrow \begin{cases} \ldots < \ldots \\ \ldots > \ldots \end{cases}$$

$\boxed{\text{Satz 6.3}}$: Jede monotone und beschränkte Zahlenfolge aus $\mathbb{R}$ ist konvergent.

genauer: Sei $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.

i) (x_n) wachsend und nach oben beschränkt

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \sup A$$

ii) ... fallend ... unten ... $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf A$

Beweis: nur i), der Rest ist dann klar; sei

$x := \sup A \Longrightarrow x_n \leq x \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

zu jedem $\varepsilon > 0$ findet man ein N mit $x_N > x - \varepsilon$

(wieso?) $\Longrightarrow x_n > x - \varepsilon \quad \forall n \geq N$ (Monotonie)

Zusammen: $$x - \varepsilon < x_n \leq x \quad \forall n \geq N$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x. \qquad \square$$

Beispiele:

① Die $\boxed{\text{Eulersche Zahl}}$ e:

Seien für $n \in \mathbb{N}$

$$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Dann gilt:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n \text{ und } \lim_{n\to\infty} b_n \text{ existieren und sind gleich.}}$$

Der gemeinsame Limes heißt

Eulersche Zahl $e \approx 2{,}71828\ldots\ldots$

Beweis: i) $\boxed{(a_n) \text{ wächst}}$:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)\underbrace{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n}_{\geq 1-\frac{1}{n} \text{ nach Bernoulli}}$$

$$\left[\text{Umformung: } \frac{a_n}{a_{n-1}} = \left\{\frac{1+1/n}{1+\frac{1}{n-1}}\right\}^n \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right]$$

$$\Longrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq \left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = 1$$

ii) $\boxed{(b_n) \text{ fällt}}$:

$$\boxed{b_{n-1}/b_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} \frac{b_{n-1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} =$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} \left(\frac{1+1/n-1}{1+1/n}\right)^n =$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} \left(\frac{1+1/n+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}}{1+1/n}\right)^n =$$

$$\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} \cdot \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n} \geq$$

Bernoulli

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{n}{n^2-1}\right) >$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

iii) $\boxed{a_n \leq b_n}$ klar!

iv) $\boxed{\begin{array}{l} (a_n) \text{ nach } \underline{\text{oben}} \text{ beschränkt,} \\ (b_n) \quad - \quad \underline{\text{unten}} \quad - \end{array}}$:

$$a_n \underset{iii)}{\leq} b_n \underset{ii)}{\leq} b_1 = (1+1/1)^2 = 4,$$

$$b_n \underset{iii)}{\geq} a_n \underset{i)}{\geq} a_1 = (1+1/1)^1 = 2$$

Ergebnis: $(a_n), (b_n)$ konvergent

v) Gleichheit der Limiten:

$$0 \le b_n - a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$$= a_n \cdot \frac{1}{n} \underset{iv)}{\le} \frac{4}{n} \longrightarrow 0. \qquad \square$$

② Berechnung von $\sqrt{a}$ für $a>0$:

$$x = \sqrt{a} \implies x^2 = a \implies$$

$$2x^2 = x^2 + a \implies \boxed{x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)}$$

Rekursion:
$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 > 0 \text{ beliebig}, \\ x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \end{array}}$$

Behauptung: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

Beweis:

<u>Fall 1</u>: $x_1 = \sqrt{a}$ gute, aber unrealistische Wahl

$\Longrightarrow x_n = \sqrt{a} \quad \forall n$

<u>Fall 2</u>: $x_1 \neq \sqrt{a}$

<u>Hilfsungleichung</u>: $\boxed{\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy}, \; x,y \geq 0}$

(folgt aus $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$!)

Damit: $x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right) \geq \sqrt{a}$

und <u>induktiv</u>: $\boxed{x_n \geq \sqrt{a} \quad \forall n \geq 2}$

$\Longrightarrow x_n^2 \geq a \Longrightarrow \boxed{x_n \geq a/x_n}$ (*)

Es folgt:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \underset{(*)}{\leq} \frac{1}{2}(x_n + x_n) = x_n$$

Ergebnis: (x_n) fallend u. nach unten beschränkt

Satz 6.3 $\Longrightarrow$ $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ existiert

Wie bestimmt man x? Da wir Konvergenz wissen, kann man in der Rekursion zur Grenze übergehen:

$$\begin{array}{l} x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \\ \downarrow n\to\infty \\ x \end{array}$$

$\Longrightarrow$: $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$, also $x = \sqrt{a}$.

$\square$

allgemeiner: $a > 0$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$

$$\sqrt[p]{a} = ?$$

$$x_1 > 0 \text{ beliebig}, \quad x_{n+1} := \frac{(p-1)x_n^p + a}{p\, x_n^{p-1}}$$

Dann:
$$\boxed{\sqrt[p]{a} = \lim_{n \to \infty} x_n}$$

Teilfolgen, Häufungswerte ....

Bspl: $(i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht konvergent, aber es gibt offenbar konvergente „Teilfolgen"

Def 6.5: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge und $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng wachsend. Dann heißt

$$(a_{f(n)})_{n \in \mathbb{N}}$$

eine Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Standardnotationen (zur Bezeichnung von Teilfolgen)

$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $n_k := f(k)$,

$(\tilde{a}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\tilde{a}_k := a_{f(k)}$) .....

Beispiel: $f(n) := 2n \rightsquigarrow$

Teilfolge $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ der Glieder mit geradem Index

Zusammenhang mit der Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Satz 6.4: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle oder komplexe Folge. Dann sind äquivalent:

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert

(ii) alle Teilfolgen sind konvergent gegen denselben Grenzwert

Beweis: (ii) $\Longrightarrow$ (i) trivial!
(betrachte die „Teilfolge" $(a_{f(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f(n)=n$)

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Gegeben sei irgendeine Teilfolge $(a_{f(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $\varepsilon > 0$.

Zunächst $\exists N_\varepsilon$ mit $|a_n - a| < \varepsilon \;\forall n \geq N_\varepsilon$

Da f streng wächst, findet man $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $f(n_\varepsilon) \geq N_\varepsilon$ und dann auch

$$f(n) \geq N_\varepsilon \;\forall n \geq n_\varepsilon$$

Zusammen: $$|a_{f(n)} - a| < \varepsilon \;\forall n \geq n_\varepsilon$$

Also: $$a = \lim_{n\to\infty} a_{f(n)}.$$

$\square$

(für das Folgende)

Motivation: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\boxed{\text{stetig}}$, d.h.: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$,

wenn immer $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

? Hat f ein Maximum (= größten Wert)?

Lösung: 1. Zeige: $M = f([a,b])$ nach oben beschränkt $\Longrightarrow$

$y := \sup M$ existiert

2. Wähle $(x_n) \in [a,b]$ mit $f(x_n) \to y$

Bolzano-Weierstraß: (x_n) beschränkt $\Longrightarrow \exists$ konvergente Teilfolge, $\tilde{x}_n \to x$.

Stetigkeit $\Longrightarrow f(\tilde{x}_n) \to f(x)$,

also $\boxed{y = f(x)}$

Def 6.6: Häufungswerte von Folgen

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Eine Zahl a heißt Häufungswert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge

$$\{n \in \mathbb{N} : \ |a_n - a| < \varepsilon\}$$

unendlich ist.

Bem: ① $\boxed{a \text{ H.W. von } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}}$, wenn es immer unendlich viele Indices m gibt mit $|a_m - a| < \varepsilon$ (zu jedem $\varepsilon > 0$!)

② a H.W. von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\not\Rightarrow$ $\{a_n : |a_n - a| < \varepsilon\}$ ist unendlich

Bspl: $\boxed{a_n = (-1)^n}$ mit

H.W. ± 1 !

③ Gibt es eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

mit

$$\boxed{\mathbb{R} = \text{Menge aller H.W. von } (a_n)}\ ?$$

Ja: Sei $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ Abzählung;

$\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$; setze also

$$a_n := f(n)$$

einfach zu zeigen ist

Satz 6.5: a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\Longrightarrow$

$\exists$ nur ein H.W., nämlich $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

b) a H.W. von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \Longleftrightarrow$

$\exists$ Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$

Beweis: selbst probieren!

Achtung: $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ hat genau einen H.W.} \not\Longrightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert}}$

Gegenbeispiel:

$$a_n := \begin{cases} 1/n, & n \text{ ungerade} \\ n, & n \text{ gerade} \end{cases}$$